社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
COMP2009-37（2009-10）

最大サイズ最大安定度マッチング問題に対する近似下限の改良

濱田　浩気†　　宮崎　修一††　　岩間　一雄†

† 京都大学 大学院情報学研究科
〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
†† 京都大学 学術情報メディアセンター
〒 606-8501 京都市左京区吉田本町
E-mail: †{khamada,iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

あらまし　安定結婚問題で不完全希望リストを許すと，同じ例題に対する全ての安定マッチングは同サイズになる．しかし，安定性を無視すると，一般にはそれよりも大きなサイズのマッチングが存在する．Biró らは，最大サイズのマッチングの中で出来るだけブロッキングペア数の少ないマッチングを求める問題を提案した．彼らは，(i) この問題が NP 困難であり，任意の正定数 ε に対して P≠NP の仮定の下で $n^{1-\epsilon}$-近似アルゴリズムを持たないこと（n は例題中の男性の数），(ii) 希望リストの長さを 3 以下に制限しても NP 困難であり，ある定数 $\delta > 1$ が存在し P≠NP の仮定の下で δ-近似アルゴリズムを持たないこと，(iii) 片側の性（例えば男性）の希望リストの長さが全て 2 以下ならば多項式時間で解けること，を示した．本論文では，上記 (ii) の近似不可能性を，定数 δ から $n^{1-\varepsilon}$（ε は任意の正定数）へと改良した．

キーワード　安定結婚問題, 近似アルゴリズム, 近似度, 多項式時間変換

An Improved Approximation Lower Bound for Maximum Cardinality Almost Stable Matching Problem

Koki HAMADA†, Shuichi MIYAZAKI††, and Kazuo IWAMA†

† Graduate School of Informatics, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan
†† Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 606-8501, Japan
E-mail: †{khamada,iwama}@kuis.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

Abstract　In the stable marriage problem that allows incomplete preference lists, all stable matchings for a given instance have the same size. However, if we ignore the stability, there can be larger matchings. Biró et al. defined the problem of finding a maximum cardinality matching that contains minimum number of blocking pairs. They proved that (i) this problem is NP-hard and cannot be approximated within the ratio of $n^{1-\varepsilon}$ for any constant $\varepsilon > 0$ unless P=NP, where n is the number of men in an input, (ii) even if each preference list is of length at most 3, the problem remains NP-hard and there exists a constant $\delta(> 1)$ such that this problem cannot be approximated within the ratio of δ unless P=NP, and (iii) if the length of preference lists of one sex is at most 2, this problem is solvable in polynomial time. In this paper, we improve the constant δ of (ii) to $n^{1-\varepsilon}$ for any $\varepsilon > 0$.

Key words　the stable marriage problem, approximation algorithms, approximation ratio, polynomial-time reduction

1. はじめに

安定結婚問題 [3], [7] とは，Gale と Shapley により提案された，以下のように定義される問題である．例題は同数（n）の男女と各人の**希望リスト**からなる．希望リストは，各人の好みに応じて異性全員を全順序で順序付けしたリストである．**マッチング**は男女間の 1 対 1 対応であり，マッチング M における男性 m のパートナーを $M(m)$，女性 w のパートナーを $M(w)$ と書く．マッチング M において，ペアになっていない男性 m と女性 w が，m は $M(m)$ よりも w を好み，w は $M(w)$ より

も m を好むとき，(m,w) を M に対する**ブロッキングペア**と呼ぶ．ブロッキングペアを含まないマッチングを**安定マッチング**と言う．Gale と Shapley は，任意の例題に少なくとも 1 つの安定マッチングが存在すること，および，安定マッチングを求める $O(n^2)$ 時間アルゴリズムを発表した [3].

安定結婚問題の 1 つの自然な拡張として，不完全リストを許す問題（これを SMI （**S**table **M**arriage with **I**ncomplete lists）と呼ぶ）がある．この問題では，異性全員を希望リストに書くのではなく，ペアになりたくない相手はリストに書かなくて良い．従って，ここでは不完全マッチングも考慮する必要があるため，ブロッキングペアの定義が以下のように修正される．マッチング M においてペアになっていない男性 m と女性 w について，(i) m と w はお互いを希望リストに書き合っている，(ii) m は M で独身であるか，$M(m)$ より w を好む，(iii) w は M で独身であるか，$M(w)$ より m を好む，の 3 つ全てが成り立つとき，(m,w) を M に対するブロッキングペアと定義する．この定義の下でブロッキングペアの存在しないマッチングが安定マッチングである．この拡張においても，任意の例題が安定マッチングを少なくとも 1 つ持ち，それを多項式時間で見つけられる．また，1 つの例題に複数安定マッチングが存在する場合でも，それらは全て同サイズであることが知られている [6].

しかし，SMI 例題において，一般に最大マッチングは安定マッチングよりも大きく，安定性を多少犠牲にしてでも大きなサイズのマッチングを求めたい応用も考えられる．ただし，そのような場合でも，出来るだけ安定性を保ちたいのが自然である．Biró ら [2] はこのような問題を **MAX SIZE MIN BP SMI** という最適化問題として定式化した．MAX SIZE MIN BP SMI は，例題として SMI と同じ例題が与えられ，最大サイズのマッチングの中で出来るだけブロッキングペア数の少ないものを求める問題である．また，正定数 p と q に対して，MAX SIZE MIN BP $(p,\ q)$-SMI は男性の希望リストの長さが p 以下で，女性の希望リストの長さが q 以下に制限された問題である．また，$p=\infty$，$q=\infty$ と書いた場合は，希望リストの長さに制限がないことを表す．

Biró らは，文献 [2] において，以下の結果を示した．(1) MAX SIZE MIN BP (∞,∞)-SMI は NP 困難であり，P≠NP ならば，任意の正定数 ε に対して $n^{1-\varepsilon}$ で近似不可能である．(2) MAX SIZE MIN BP (3, 3)-SMI は APX 困難であり，P≠NP ならば，$\frac{3557}{3556}\simeq 1.00028$ で近似不可能である．(3) MAX SIZE MIN BP $(2,\infty)$-SMI に対する $O(n^3)$ 時間アルゴリズムが存在する．

本論文では，上記 (2) の近似不可能性 $\frac{3557}{3556}$ を $n^{1-\varepsilon}$（ε は任意の正定数）に改良する．本論文で用いる手法は，文献 [2] で示された上記 (1) の証明を元にしている．文献 [2] においては，ごみ集めガジェットおよび近似不可能性のギャップ増幅用ガジェットの作成のため，一部の希望リストの長さを制限することが出来なかった．本論文では，同じ機能を持つガジェットが長さ 3 以下の希望リストで実現できることを示すことにより，改良を達成した．

より安定なマッチングを求める問題に対する研究は，近年盛んに行われている．Abraham らは，安定ルームメイト問題に対して，ブロッキングペア数の出来るだけ少ないマッチングを求める問題を定義し，この問題の様々な拡張において近似不可能性を示した [1]．ブロッキングペア数の他に，安定性の定義として，ブロッキングペアに含まれる人数，マッチングサイズに対するブロッキングペア数の比なども考えられている [4], [5].

2. MAX SIZE MIN BP (3, 3)-SMI に対する近似不可能性の改良

［**定理** 2.1］ P≠NP ならば，任意の正定数 $\varepsilon>0$ に対して，MAX SIZE MIN BP $(3,3)$-SMI に対する多項式時間 $n^{1-\varepsilon}$–近似アルゴリズムは存在しない．ここで，n は入力中の男性の数である．

証明． 文献 [2] と同様に，3-正則グラフの細分グラフに対する厳密極大マッチング問題 (EXACT-MM) からの多項式時間変換により定理を証明する．この問題は NP 完全であることが既に証明されている [8]．枝 (u,v) に対して，新たな頂点 w を用意し，(u,v) を (u,w) と (w,v) で置き換えることを，枝 (u,v) の**細分**と呼ぶ．グラフ H に対して，H の全ての枝を細分することによりグラフ G が得られるなら，G は**細分グラフ**であるという．この問題は，3-正則グラフの細分グラフ及び正整数 K が与えられ，G がサイズ K の極大マッチングを持つか否かを問う判定問題である．以下では，入力グラフがこのように制限された EXACT-MM を単に「EXACT-MM」と表記する．

EXACT-MM の例題 (G,K) に対して MAX SIZE MIN BP $(3,3)$-SMI の例題 I を以下のように構成する．(i) I は完全マッチングを持つ（すなわち，実行可能解は完全マッチングに制限される）．(ii) (G,K) が EXACT-MM に対する “yes” の例題であるならば，I は比較的ブロッキングペア数の少ない完全マッチングを持つ．(iii) (G,K) が EXACT-MM に対する “no” の例題であるなら，I に対するどんな完全マッチングも多数のブロッキングペアを持つ．

2.1 $\binom{m}{r}$–ガジェット

まず，準備として，変換に必要な $\binom{m}{r}$–ガジェットを導入する．このガジェットは，文献 [2] の定理 1 の証明における X や Y と同様の，ごみ集めの機能を担うガジェットである．$X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ を m 人の男性からなる集合とし，r $(0<r\leq m)$ を整数とする.（X と r に対する）$\binom{m}{r}$–ガジェットは，以下で示される $2mr-r$ 人の男性 $(\bigcup_{1\leq i\leq m}A_i)\cup(\bigcup_{1\leq j\leq r}C_j)$ と，$2mr$ 人の女性 $(\bigcup_{1\leq i\leq m}B_i)\cup(\bigcup_{1\leq j\leq r}D_j)$ からなる.（以後，このガジェットを $\mathcal{C}(X,r)$ と記述する.）

$$
\begin{aligned}
A_i &= \{a_i^j : 1\leq j\leq r\} && (1\leq i\leq m)\\
B_i &= \{b_i^j : 1\leq j\leq r\} && (1\leq i\leq m)\\
C_j &= \{c_j^i : 2\leq i\leq m\} && (1\leq j\leq r)\\
D_j &= \{d_j^i : 1\leq i\leq m\} && (1\leq j\leq r)
\end{aligned}
$$

各人の希望リストは図 1 の通りである．p の希望リスト「$p: a\ b\ c$」は，p が a，b，c をこの順に好きであることを意味する．各 $x_i\in X$ に対して，x_i を希望リストに書いている女性

b_i^1 がガジェット $\mathcal{C}(X,r)$ 中にただ一人いるが，その女性を（x_i の観点から）$\mathcal{C}(X,r)[x_i]$ と書くことにする．ガジェット $\mathcal{C}(X,r)$ は，$|X'|=r$ である任意の部分集合 $X' \subseteqq X$ の男性と，ブロッキングペアをあまり作らずにマッチすることが出来る．下記の補題では，各男性 $x_i \in X$ は女性 $\mathcal{C}(X,r)[x_i](=b_i^1)$ を希望リストに書いてあることを仮定する．

$$
\begin{array}{lllll}
a_i^1: & d_1^i\ b_i^2\ b_i^1 & \qquad & b_i^1: & a_i^1\ x_i \\
a_i^2: & d_2^i\ b_i^3\ b_i^2 & & b_i^2: & a_i^2\ a_i^1 \\
a_i^3: & d_3^i\ b_i^4\ b_i^3 & & b_i^3: & a_i^3\ a_i^2 \\
 & \vdots & & & \vdots \\
a_i^{r-1}: & d_{r-1}^i\ b_i^r\ b_i^{r-1} & & b_i^{r-1}: & a_i^{r-1}\ a_i^{r-2} \\
a_i^r: & d_r^i\ b_i^r & & b_i^r: & a_i^r\ a_i^{r-1} \\
 & & & d_j^1: & c_j^2\ a_1^j \\
c_j^2: & d_j^2\ d_j^1 & & d_j^2: & c_j^3\ c_j^2\ a_2^j \\
c_j^3: & d_j^3\ d_j^2 & & d_j^3: & c_j^4\ c_j^3\ a_3^j \\
c_j^4: & d_j^4\ d_j^3 & & d_j^4: & c_j^5\ c_j^4\ a_4^j \\
\vdots & & & \vdots & \\
c_j^{m-1}: & d_j^{m-1}\ d_j^{m-2} & & d_j^{m-1}: & c_j^m\ c_j^{m-1}\ a_{m-1}^j \\
c_j^m: & d_j^m\ d_j^{m-1} & & d_j^m: & c_j^m\ a_m^j
\end{array}
$$

図 1　$\mathcal{C}(X,r)$ の希望リスト

［**補題** 2.2］ X を m 人の男性からなる集合，r を $0<r\leqq|X|$ を満たす正整数とする．$|X'|=r$ である任意の $X'\subseteqq X$ に対して，以下の性質を満たす X と $\mathcal{C}(X,r)$ に対するマッチング M が存在する．(i) $\mathcal{C}(X,r)$ の要素は全てマッチしている．(ii) X' 中の全ての男性は $\mathcal{C}(X,r)$ 中の女性とマッチし，$X\setminus X'$ 中の全ての男性は M で独身である．(iii) M に対するブロッキングペア数は r 以下であり，X 中の男性はブロッキングペアには含まれない．

証明． $X'=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_r}\}$ $(1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_r\leqq m)$ とする．マッチング M を以下のように構成する．まず，各 j $(1\leqq j\leqq r)$ に対して，以下のペアを M に加える．

$(a_{i_j}^k, b_{i_j}^{k+1})$．ただし，$k=1,\ldots,j-1$．
$(a_{i_j}^k, b_{i_j}^k)$．ただし，$k=j+1,\ldots,r$．
$(a_{i_j}^j, d_j^{i_j})$．
(c_j^{k+1}, d_j^k)．ただし，$k=1,\ldots,i_j-1$．
(c_j^k, d_j^k)．ただし，$k=i_j+1,\ldots,m$．
$(x_{i_j}, b_{i_j}^1)$．

図2に，i_j に対するマッチングの様子を示す．また，$x_i\in X\setminus X'$ である各 i に対して，(a_i^k,b_i^k) $(k=1,\ldots,r)$ を M に追加する．

補題の条件 (i) と (ii) が満たされていることは容易に分かる．また，ブロッキングペアが $(c_j^{i_j},d_j^{i_j})$ $(1\leqq j\leqq r,\ i_j\neq 1)$ のみであることも簡単に検証できるため，ブロッキングペア数が高々 r であることが分かり，(iii) も証明出来る．□

［**補題** 2.3］ X を男性集合，r を $0<r\leqq|X|$ を満たす正整数とする．また，M を X と $\mathcal{C}(X,r)$ に対する任意のマッチングで，$\mathcal{C}(X,r)$ の要素は全てマッチさせるものとする．このとき，X 中の独身男性の数は $|X|-r$ である．

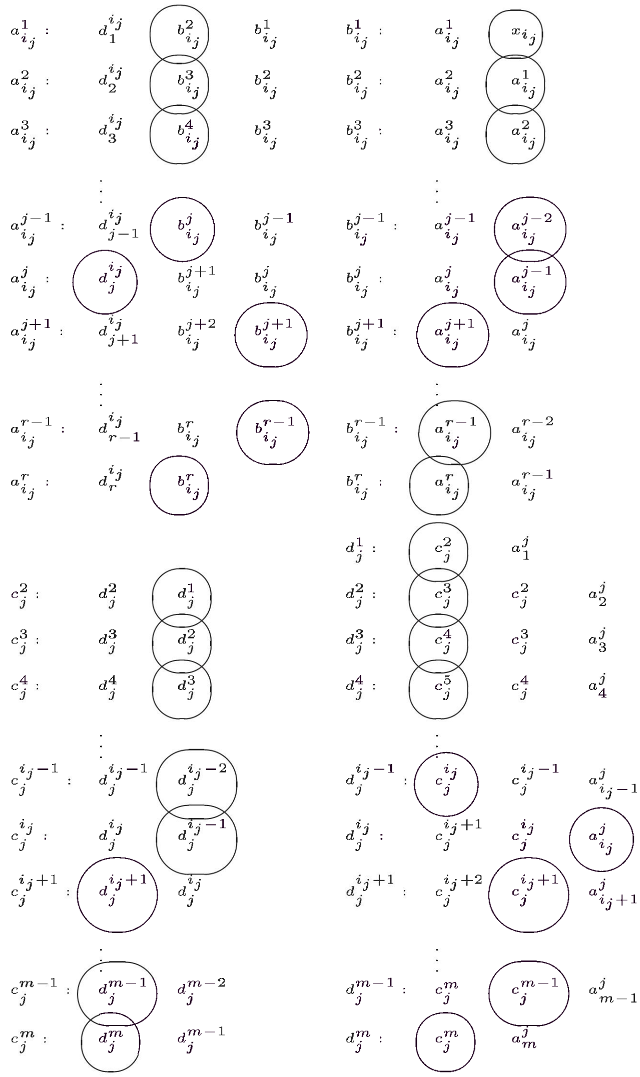

図 2　補題 2.2 の証明で使われるマッチングの一部

証明． $\mathcal{C}(X,r)$ 中のメンバーは $\mathcal{C}(X,r)$ と X の人しか希望リストに書いていない．また，$\mathcal{C}(X,r)$ には女性の数が男性の数より r 人多い．これにより補題が成り立つ．□

X を女性集合としたときも，男性と女性の役割を入れ替えることにより，同様に $\binom{m}{r}$–ガジェットを定義する．

2.2　多項式時間変換

$I'=(G,K)$ を EXACT–MM の例題とする．ここで G は，ある 3-正則グラフの細分グラフであり，K は正整数である．G は二部グラフであるので，$G=(U,W,E)$，$U=\{u_1,\cdots,u_{n_1}\}$，$W=\{w_1,\cdots,w_{n_2}\}$ と書くことができ，また，U の各頂点は次数 2，W の各頂点は次数 3 である．従って，$2n_1=3n_2$ となる．一般性を失うことなく，$K<\min(|U|,|W|)$ であると仮定してよく，また G はサイズ K のマッチングを持つとして良い．

文献 [2] と同様の定義を以下に与える．各頂点 $u_i\in U$ に対して，u_i の G における 2 つの隣接点を w_{p_i} と w_{q_i}（$p_i<q_i$）とする．同様に，頂点 $w_j\in W$ の 3 つの隣接点を u_{r_j}，u_{s_j}，u_{t_j}（$r_j<s_j<t_j$）とする．また，$(u_i,w_j)\in E$ である $u_i\in U$ と

$w_j \in W$ に対して，w_j が w_{p_i} であるか w_{q_i} であるかに応じて，$\sigma_{j,i} = 1$ または 2 と定義する．同様に，u_i が u_{r_j} か u_{s_j} か u_{t_j} かに応じて，$\tau_{i,j} = 1, 2, 3$ とそれぞれ定義する．定理で与えられた $\varepsilon > 0$ に対して，$B = \lceil \frac{3}{\varepsilon} \rceil$，$C = (n_1 + n_2)^{B+1}$ と定義する．

各頂点 $u_i \in U$ に対して，$2C + 3$ 人の男性と $2C + 2$ 人の女性を構成する．それらの人の希望リストを，図 3 に掲げる．図 3 において，男性の希望リストは左側に，女性の希望リストは右側に記述している．これらの男性と女性からなる集合を $\mathcal{U}(u_i)$ と表す．集合 U^0 を $U^0 = \{u_1^0, \cdots, u_{n_1}^0\}$ と定義する．U^0 は $1 \leqq i \leqq n_1$ に対する各 $\mathcal{U}(u_i)$ から男性 u_i^0 を 1 人ずつとってきた集合である．続いて，$\binom{n_1}{n_1-K}$–ガジェット $\mathcal{C}(U^0, n_1 - K)$ を構成する．

$$
\begin{array}{llll}
u_i^1: & z_i^1 \;\; w_{p_i}^{\tau_{i,p_i}} & z_i^1: & u_i^1 \;\; u_i^2 \\
u_i^2: & z_i^1 \;\; z_i^2 \;\; w_{q_i}^{\tau_{i,q_i}} & z_i^2: & u_i^2 \;\; g_{i,1}^1 \\
g_{i,1}^1: & z_i^2 \;\; h_{p_i,\tau_{i,p_i}}^1 \;\; e_{i,1}^1 & e_{i,1}^1: & g_{i,1}^1 \;\; g_{i,1}^2 \\
g_{i,1}^2: & e_{i,1}^1 \;\; h_{p_i,\tau_{i,p_i}}^2 \;\; e_{i,1}^2 & e_{i,1}^2: & g_{i,1}^2 \;\; g_{i,1}^3 \\
g_{i,1}^3: & e_{i,1}^2 \;\; h_{p_i,\tau_{i,p_i}}^3 \;\; e_{i,1}^3 & e_{i,1}^3: & g_{i,1}^3 \;\; g_{i,1}^4 \\
 & \vdots & & \vdots \\
g_{i,1}^{C-1}: & e_{i,1}^{C-2} \;\; h_{p_i,\tau_{i,p_i}}^{C-1} \;\; e_{i,1}^{C-1} & e_{i,1}^{C-1}: & g_{i,1}^{C-1} \;\; g_{i,1}^{C} \\
g_{i,1}^{C}: & e_{i,1}^{C-1} \;\; h_{p_i,\tau_{i,p_i}}^{C} \;\; e_{i,1}^{C} & e_{i,1}^{C}: & g_{i,1}^{C} \;\; g_{i,2}^1 \\
g_{i,2}^1: & e_{i,1}^{C} \;\; h_{q_i,\tau_{i,q_i}}^1 \;\; e_{i,2}^1 & e_{i,2}^1: & g_{i,2}^1 \;\; g_{i,2}^2 \\
g_{i,2}^2: & e_{i,2}^1 \;\; h_{q_i,\tau_{i,q_i}}^2 \;\; e_{i,2}^2 & e_{i,2}^2: & g_{i,2}^2 \;\; g_{i,2}^3 \\
g_{i,2}^3: & e_{i,2}^2 \;\; h_{q_i,\tau_{i,q_i}}^3 \;\; e_{i,2}^3 & e_{i,2}^3: & g_{i,2}^3 \;\; g_{i,2}^4 \\
 & \vdots & & \vdots \\
g_{i,2}^{C-1}: & e_{i,2}^{C-2} \;\; h_{q_i,\tau_{i,q_i}}^{C-1} \;\; e_{i,2}^{C-1} & e_{i,2}^{C-1}: & g_{i,2}^{C-1} \;\; g_{i,2}^{C} \\
g_{i,2}^{C}: & e_{i,2}^{C-1} \;\; h_{q_i,\tau_{i,q_i}}^{C} \;\; e_{i,2}^{C} & e_{i,2}^{C}: & g_{i,2}^{C} \;\; u_i^0 \\
u_i^0: & e_{i,2}^{C} \;\; \mathcal{C}(U^0, n_1 - K)[u_i^0] & &
\end{array}
$$

図 3　$\mathcal{U}(u_i)$ の希望リスト

同様に，各女性 $w_j \in W$ に対して $3C + 3$ 人の男性と $3C + 4$ 人の女性を構成する．これらの人々の希望リストを図 4 に掲げる．これらの男女からなる集合を，$\mathcal{W}(w_j)$ で表す．集合 W^0 を $W^0 = \{w_1^0, \cdots, w_{n_2}^0\}$ と定義する．W^0 は，$1 \leqq j \leqq n_2$ に対して，各 $\mathcal{W}(w_j)$ から女性 w_j^0 を 1 人ずつとってきた集合である．続いて $\binom{n_2}{n_2-K}$–ガジェット $\mathcal{C}(W^0, n_2 - K)$ を構成する．

以上で変換は完成である．変換で得られた例題 I は同数 $n = (2 + 2C + 2n_1 - 2K)n_1 + (3 + 3C + 2n_2 - 2K)n_2 + K$ の男女からなる．変換で作られた希望リストは，いずれも長さ 3 以下である．また，変換が I' のサイズの多項式時間で実行可能であることは，容易に分かる．

2.3　各ガジェットの性質

変換の正しさの証明のための準備として，いくつかの補題を証明する．

［**補題** 2.4］　G の各枝 $(u_i, w_j) \in E$ について，$\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ の人々からなるマッチング M で以下の (i), (ii), (iii) を満たすものが存在する．(i) $\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ の人々は全員マッチしている．(ii) M に対するブロッキングペア数は 2 以下である．(iii) M をどのように拡張して I に対する完全マッチングを作ったとしても，$\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ 中の人は誰も，$\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ 以外の人とはブロッキングペアを構成しない．

$$
\begin{array}{llll}
v_j^1: & w_j^1 \;\; w_j^2 & w_j^1: & v_j^1 \;\; u_{r_j}^{\sigma_{j,r_j}} \\
v_j^2: & w_j^2 \;\; w_j^3 & w_j^2: & v_j^1 \;\; v_j^2 \;\; u_{s_j}^{\sigma_{j,s_j}} \\
v_j^3: & w_j^3 \;\; h_{j,1}^1 & w_j^3: & v_j^2 \;\; v_j^3 \;\; u_{t_j}^{\sigma_{j,t_j}} \\
f_{j,1}^1: & h_{j,1}^1 \;\; h_{j,1}^2 & h_{j,1}^1: & v_j^3 \;\; g_{r_j,\sigma_{j,r_j}}^1 \;\; f_{j,1}^1 \\
f_{j,1}^2: & h_{j,1}^2 \;\; h_{j,1}^3 & h_{j,1}^2: & f_{j,1}^1 \;\; g_{r_j,\sigma_{j,r_j}}^2 \;\; f_{j,1}^2 \\
f_{j,1}^3: & h_{j,1}^3 \;\; h_{j,1}^4 & h_{j,1}^3: & f_{j,1}^2 \;\; g_{r_j,\sigma_{j,r_j}}^3 \;\; f_{j,1}^3 \\
 & \vdots & & \vdots \\
f_{j,1}^{C-1}: & h_{j,1}^{C-1} \;\; h_{j,1}^{C} & h_{j,1}^{C-1}: & f_{j,1}^{C-2} \;\; g_{r_j,\sigma_{j,r_j}}^{C-1} \;\; f_{j,1}^{C-1} \\
f_{j,1}^{C}: & h_{j,1}^{C} \;\; h_{j,2}^1 & h_{j,1}^{C}: & f_{j,1}^{C-1} \;\; g_{r_j,\sigma_{j,r_j}}^{C} \;\; f_{j,1}^{C} \\
f_{j,2}^1: & h_{j,2}^1 \;\; h_{j,2}^2 & h_{j,2}^1: & f_{j,1}^{C} \;\; g_{s_j,\sigma_{j,s_j}}^1 \;\; f_{j,2}^1 \\
f_{j,2}^2: & h_{j,2}^2 \;\; h_{j,2}^3 & h_{j,2}^2: & f_{j,2}^1 \;\; g_{s_j,\sigma_{j,s_j}}^2 \;\; f_{j,2}^2 \\
f_{j,2}^3: & h_{j,2}^3 \;\; h_{j,2}^4 & h_{j,2}^3: & f_{j,2}^2 \;\; g_{s_j,\sigma_{j,s_j}}^3 \;\; f_{j,2}^3 \\
 & \vdots & & \vdots \\
f_{j,2}^{C-1}: & h_{j,2}^{C-1} \;\; h_{j,2}^{C} & h_{j,2}^{C-1}: & f_{j,2}^{C-2} \;\; g_{s_j,\sigma_{j,s_j}}^{C-1} \;\; f_{j,2}^{C-1} \\
f_{j,2}^{C}: & h_{j,2}^{C} \;\; h_{j,3}^1 & h_{j,2}^{C}: & f_{j,2}^{C-1} \;\; g_{s_j,\sigma_{j,s_j}}^{C} \;\; f_{j,2}^{C} \\
f_{j,3}^1: & h_{j,3}^1 \;\; h_{j,3}^2 & h_{j,3}^1: & f_{j,2}^{C} \;\; g_{t_j,\sigma_{j,t_j}}^1 \;\; f_{j,3}^1 \\
f_{j,3}^2: & h_{j,3}^2 \;\; h_{j,3}^3 & h_{j,3}^2: & f_{j,3}^1 \;\; g_{t_j,\sigma_{j,t_j}}^2 \;\; f_{j,3}^2 \\
f_{j,3}^3: & h_{j,3}^3 \;\; h_{j,3}^4 & h_{j,3}^3: & f_{j,3}^2 \;\; g_{t_j,\sigma_{j,t_j}}^3 \;\; f_{j,3}^3 \\
 & \vdots & & \vdots \\
f_{j,3}^{C-1}: & h_{j,3}^{C-1} \;\; h_{j,3}^{C} & h_{j,3}^{C-1}: & f_{j,3}^{C-2} \;\; g_{t_j,\sigma_{j,t_j}}^{C-1} \;\; f_{j,3}^{C-1} \\
f_{j,3}^{C}: & h_{j,3}^{C} \;\; w_j^0 & h_{j,3}^{C}: & f_{j,3}^{C-1} \;\; g_{t_j,\sigma_{j,t_j}}^{C} \;\; f_{j,3}^{C} \\
 & & w_j^0: & f_{j,3}^{C} \;\; \mathcal{C}(W^0, n_2 - K)[w_j^0]
\end{array}
$$

図 4　$\mathcal{W}(w_j)$ の希望リスト

証明．　M を以下のように作る．$(u_i, w_j) \in E$ なので，σ と τ の定義より $\sigma_{j,i} = k$ かつ $\tau_{i,j} = l$ を満たす整数 k と l が存在する．まず，ペア (u_i^k, w_j^l) を M に加える．次に $\mathcal{U}(u_i)$ 中の人を考える．以下のペアを M に加える．

$(g_{i,1}^1, z_i^2)$．
$(g_{i,1}^s, e_{i,1}^{s-1})$．ただし，$s = 2, \ldots, C$．
$(g_{i,2}^1, e_{i,1}^C)$．
$(g_{i,2}^s, e_{i,2}^{s-1})$．ただし，$s = 2, \ldots, C$．
$(u_i^0, e_{i,2}^C)$．

次に，$k = 1$ ならば (u_i^2, z_i^1) を，$k = 2$ ならば (u_i^1, z_i^1) を M に加える．

次に $\mathcal{W}(w_j)$ 中の人々について考える．以下のペアを M に加える．

$(v_j^3, h_{j,1}^1)$．
$(f_{j,1}^s, h_{j,1}^{s+1})$．ただし，$s = 1, \ldots, C - 1$．
$(f_{j,1}^C, h_{j,2}^1)$．
$(f_{j,2}^s, h_{j,2}^{s+1})$．ただし，$s = 1, \ldots, C - 1$．
$(f_{j,2}^C, h_{j,3}^1)$．
$(f_{j,3}^s, h_{j,3}^{s+1})$．ただし，$s = 1, \ldots, C - 1$．
$(f_{j,3}^C, w_j^0)$．

最後に，$l=1$ ならば (v_j^1, w_j^2) と (v_j^2, w_j^3) を，$l=2$ ならば (v_j^1, w_j^1) と (v_j^2, w_j^3) を，$l=3$ ならば (v_j^1, w_j^1) と (v_j^2, w_j^2) を M に加える．

条件 (i) が成り立つことは容易に分かる．条件 (ii) と (iii) が成り立つことを見るためには，以下のことに注意すれば良い．$\mathcal{U}(u_i)$ において，任意の t, s に対する男性 $g_{i,t}^s$ と男性 u_i^0 は M で第 1 位の女性とマッチしている．これらの男性はブロッキングペアになり得ない．また，これらの男性だけを希望リストに含む女性も，ブロッキングペアになり得ない．これらの考察から，ブロッキングペアになり得るのは，u_i^1，u_i^2，z_i^1，z_i^2 のみである．$k=1$ と $k=2$ の場合を具体的にチェックすれば，高々 1 つのブロッキングペアしか発生しないことが検証できる．同様に，$\mathcal{W}(w_j)$ において，任意の t, s に対する女性 $h_{j,t}^s$ と女性 w_j^0 は M で第 1 位の男性とマッチしている．同様の考察から，ブロッキングペアになり得るのは，v_j^1，v_j^2，v_j^3，w_j^1，w_j^2，w_j^3 のみであることが分かる．同様に，$l=1,2,3$ の場合を検証することにより，高々1 つのブロッキングペアしか発生しないことが分かる．従って，ブロッキングペアの総数は高々2 であり，いかなる拡張においても外部の人とブロッキングペアを構成することはない． □

［**補題** 2.5］ I におけるマッチングで $\mathcal{U}(u_i)$ のメンバーを全員マッチさせるいかなるマッチングにおいても，$\mathcal{U}(u_i)$ の人々は男性 1 人を除いて，$\mathcal{U}(u_i)$ の中でのみマッチする．同様に，I におけるマッチングで $\mathcal{W}(w_j)$ のメンバーを全員マッチさせるいかなるマッチングにおいても，$\mathcal{W}(w_j)$ の人々は女性 1 人を除いて，$\mathcal{W}(w_j)$ の中でのみマッチする．

証明． $\mathcal{U}(u_i)$ 中の女性は皆 $\mathcal{U}(u_i)$ 中の男性しか希望リストに書いていない．また，$\mathcal{U}(u_i)$ は女性より男性を 1 人多く含んでいる．これより補題が成り立つ．$\mathcal{W}(w_j)$ についても同様に証明できる． □

［**補題** 2.6］ $(u_i, w_j) \in E$ とする．M を，I の任意のマッチングで，$\mathcal{U}(u_i)$ と $\mathcal{W}(w_j)$ の全員をマッチさせ，かつ，$(u_i^0, \mathcal{C}(U^0, n_1-K)[u_i^0])$ と $(w_j^0, \mathcal{C}(W^0, n_2-K)[w_j^0])$ の両方を含むものとする．このとき，M に対するブロッキングペアが少なくとも C 個存在する．(また，これらのブロッキングペアは $\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ のメンバーのみにより構成される．)

証明． $(u_i^0, \mathcal{C}(U^0, n_1-K)[u_i^0]) \in M$ であり，$\mathcal{U}(u_i)$ の人は全員 M でマッチしているので，$\mathcal{U}(u_i)$ の女性の希望リストから，女性のマッチする相手が一意に決まっていく．すなわち，任意の t, s に対して $(g_{i,t}^s, e_{i,t}^s) \in M$ であり，$t=1,2$ に対して $(u_i^t, z_i^t) \in M$ となる．同様に，$\mathcal{W}(w_j)$ 中のペアも一意に決まっていく．すなわち，任意の t, s に対して $(f_{j,t}^s, h_{j,t}^s) \in M$ であり，$t=1,2,3$ に対して $(v_j^t, w_j^t) \in M$ となる．

$(u_i, w_j) \in E$ なので，σ と τ の定義から，$\sigma_{j,i}=k$ かつ $\tau_{i,j}=l$ なる整数 k と l が存在する．すると，全ての $s (1 \leqq s \leqq C)$ に対して $(g_{i,k}^s, h_{j,l}^s)$ は M に対するブロッキングペアとなる． □

2.4 変換の正当性

まず，I が完全マッチングを持つことを示す．G がサイズ K のマッチングを持つと最初に仮定したので，それを M' とおく．$(u_i, w_j) \in M'$ である各枝に対して，$\mathcal{U}(u_i)$ と $\mathcal{W}(w_j)$ の人々を，補題 2.4 の証明と同様のやり方でマッチさせる．グラフ G において，U 中には M' でマッチしていない頂点が n_1-K 個存在する．U^0 の部分集合で，これらの頂点に対応した男性からなる集合を $\tilde{U^0} (\subseteqq U^0)$ とする．すなわち $\tilde{U^0} = \{u_i^0 : u_i \in U$ は M' でマッチしていない $\}$ である．$\tilde{U^0}$ の男性と $\binom{n_1}{n_1-K}$–ガジェット $\mathcal{C}(U^0, n_1-K)$ の人々を，補題 2.2 の証明にあるようにマッチさせる．次に，$u_i^0 \in \tilde{U^0}$ である各 i に対して，$\mathcal{U}(u_i)$ 中の全ての女性を第 1 希望の男性とマッチさせる．同様に，n_2-K 個の W の頂点が M' でマッチしていない．そこで，女性集合 $\tilde{W^0} (\subseteqq W^0)$ を $\tilde{W^0} = \{w_j^0 : w_j \in W$ は M'でマッチしていない $\}$ と定義する．$\tilde{W^0}$ と $\binom{n_2}{n_2-K}$–ガジェット $\mathcal{C}(W^0, n_2-K)$ の人々を，補題 2.2 の証明と同様のやり方でマッチさせる．$w_j^0 \in \tilde{W^0}$ である各 j に対して，$\mathcal{W}(w_j)$ 中の全ての男性を第 1 希望の女性とマッチさせる．補題 2.2 の (i) および (ii) と，補題 2.4 の (i) より，上記のように作られたマッチング M が I の完全マッチングであることが分かる．

G がサイズ K の極大マッチング M' を持つと仮定する．M' を元に，I の完全マッチング M を上述のように構成する．ここで，M に対するブロッキングペアの数を数える．補題 2.2 の (iii) より，$\mathcal{C}(U^0, n_1-K)$ は高々n_1-K，$\mathcal{C}(W^0, n_2-K)$ は高々n_2-K 個のブロッキングペアしか含まない．また，これらのガジェットの人々は，他の人々とはブロッキングペアを構成しない．次に，頂点に対応するガジェットを考える．補題 2.4 の (ii) より，$(u_i, w_j) \in M'$ である u_i と w_j に対しては，$\mathcal{U}(u_i)$ と $\mathcal{W}(w_j)$ の人々からなるブロッキングペアの数は高々2 つである．$|M'| = K$ なので，そのようなブロッキングペアは高々$2K$ 個である．また，補題 2.4 の (iii) より，$\mathcal{U}(u_i)$ と $\mathcal{W}(w_j)$ の人々は，$\mathcal{U}(u_i) \cup \mathcal{W}(w_j)$ 以外の人とはブロッキングペアを構成しない．最後に，M' でマッチしていない頂点に対応するガジェットを考える．u_i が M' でマッチしていないようなガジェット $\mathcal{U}(u_i)$ に注目する．M の構成方法より，$\mathcal{U}(u_i)$ 中の女性は全て第 1 位の男性とマッチしているため，ブロッキングペアにはなり得ない．そこで，唯一の可能性は，ある j と s に対して男性 $g_{i,\sigma_{j,i}}^s$ が女性 $h_{j,\tau_{i,j}}^s$ とブロッキングペアを構成することである．その場合，$(u_i, w_j) \in E$ となっているはずであるが，M' は極大であるので頂点 w_j は M' でマッチしている． すると，M の構成法より，$h_{j,\tau_{i,j}}^s$ は第 1 希望男性とマッチしているはずであり，$(g_{i,\sigma_{j,i}}^s, h_{j,\tau_{i,j}}^s)$ はブロッキングペアにはなり得ない．同様に，頂点 w_j が M' でマッチしていないような $\mathcal{W}(w_j)$ についても，その中にはブロッキングペアに含まれている人がいないことが示せる．従って，M に対するブロッキングペア数は高々 $(n_1-K)+(n_2-K)+2K = n_1+n_2$ となる．

逆に，I に対する完全マッチング M で，ブロッキングペア数が C 未満のものがあったとする．補題 2.5 より，各 $u_i \in U$ に対して，$\mathcal{U}(u_i)$ 中の人は 1 人の男性を除いて内部でマッチする．この，例外となる 1 人の男性を**溢れ男性**と呼ぶことにする．

従って，ちょうど n_1 人の溢れ男性がいることになる．また，補題 2.3 より，M は U^0 中の n_1-K 人の男性と $\mathcal{C}(U^0,n_1-K)$ の女性とマッチさせていることになるが，これらの男性は溢れ男性である．よって，残り K 人の溢れ男性がいる．同様に**溢れ女性**も定義する．また，同様の議論から，K 人の溢れ女性が残ることになる．M は完全マッチングなので、これら K 人の男女が M でマッチしていることになる．

マッチング M' を $M'=\{(u_i,w_j):(x,y)\in M, x\in \mathcal{U}(u_i), y\in \mathcal{W}(w_j)\}$ と定義する．x $(\in \mathcal{U}(u_i))$ と y $(\in \mathcal{W}(w_j))$ に対して $(x,y)\in M$ とすると，I の希望リストの構成方法から $(u_i,w_j)\in E$ である．また，x と y は上述した K 人の溢れ男性および溢れ女性であることが分かる．従って，M' は G におけるサイズ K のマッチングになる．以下，M' が極大であることを示す．仮に極大でなかったとする．すると，u_i も w_j も M' でマッチしていないような枝 $(u_i,w_j)\in E$ が存在する．M' の構成方法より，M において，男性 $u_i^0\in\mathcal{U}(u_i)$ は女性 $\mathcal{C}(U^0,n_1-K)[u_i^0]$ と，女性 $w_j^0\in\mathcal{W}(w_j)$ は男性 $\mathcal{C}(W^0,n_2-K)[w_j^0]$ とマッチしているはずである．しかし，その場合，補題 2.6 から，M は少なくとも C 個のブロッキングペアを含んでいることになり，最初の仮定に矛盾する．よって M' は極大である．結果として，G がサイズ K の極大マッチングを持たないならば，I はブロッキングペア数 $C(=(n_1+n_2)^{B+1})$ 未満の完全マッチングを持たないことが言えた．

従って，MAX SIZE MIN BP $(3,3)$-SMI に対する $(n_1+n_2)^B$–近似アルゴリズムが存在すれば，EXACT–MM が多項式時間で解けることになり，P=NP となる．最後に，$(n_1+n_2)^B\geq n^{1-\varepsilon}$ であることを示す．前述のように

$$n=(2+2C+2n_1-2K)n_1+(3+3C+2n_2-2K)n_2+K \quad (1)$$

であり，これより $n\leqq 5(n_1+n_2)^{B+2}$ となる．従って，

$$(n_1+n_2)^B\geqq 5^{-\frac{B}{B+2}}n^{\frac{B}{B+2}} \quad (2)$$

が言える．一般性を失うことなく $n_1\geqq 3$ とする．また，前述のように U と W の全ての頂点は次数それぞれ 2 と 3 であるので，$2n_1=3n_2$ が成り立つ．従って $n_1+n_2\geqq 5$ が言える．また，仮定より $K<\min(n_1,n_2)$ であるので，式 (1) より $n\geqq 5^B$ が言える．よって $5^{-\frac{B}{B+2}}\geqq n^{-\frac{1}{B+2}}$ となる．$B+2\geqq\frac{3}{\varepsilon}$ であるので，式 (2) より $(n_1+n_2)^B\geqq n^{1-\varepsilon}$ が言える．これで証明が完結する． □

謝辞． 本研究は科研費（19200001，20700009）の助成を受けたものである．

文　献

[1] D. J. Abraham, P. Biró and D. F. Manlove, " "Almost stable" matchings in the roommates problem," *Proc. WAOA 2005*, LNCS 3879, pp. 1–14, 2005.

[2] P. Biró, D. F. Manlove, and S. Mittal, "Size versus stability in the marriage problem," *Proc. WAOA 2008*, LNCS 5426, pp. 15–28, 2008 (Full version: Technical Report TR-2008-283, University of Glasgow, Department of Computing Science, 2008).

[3] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol. 69, pp. 9–15, 1962.

[4] K. Eriksson and O. Häggström, "Instability of matchings in decentralized markets with various preference structures," *International Journal of Game Theory*, Vol. 36, Issue 3, pp. 409–420, 2008.

[5] P. Floréen, P. Kaski, V. Polishchuk, and J. Suomela, "Almost stable matchings in constant time," CoRR abs/0812.4893, 2008.

[6] D. Gale and M. Sotomayor, "Some remarks on the stable matching problem," *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232, 1985.

[7] D. Gusfield and R. W. Irving, "The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms," MIT Press, Boston, MA, 1989.

[8] G. O'Malley, "Algorithmic aspects of stable matching problems," PhD thesis, University of Glasgow, 2007.